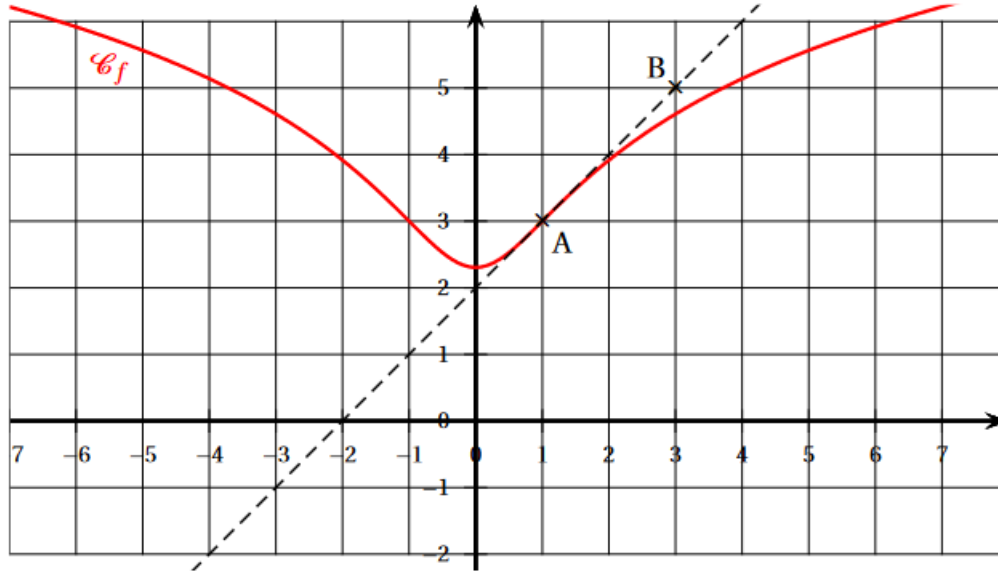


Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On considère les points  $A(1; 3)$  et  $B(3; 5)$ . On donne ci-dessous  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

### Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
2. La fonction  $f$  est définie par l'expression  $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels positifs.
  - a. Déterminer l'expression de  $f'(x)$ .
  - b. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  à l'aide des résultats précédents.

### Partie B

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que  $f$  est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Déterminer l'expression de  $f'(x)$ .  
Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
4. À l'aide du tableau des variations de  $f$ , donner les valeurs du réel  $k$  pour lesquelles l'équation  $f(x) = k$  admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation  $f(x) = 3 + \ln 2$ .

### Partie C

On rappelle que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$ .

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ .
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.